全品
— SINCE 1992 —

教育图书 功能学具 学生之家

基础教育行业专研品牌

30+年专注教育行业

全品学练考

主编 肖德好

导学案

高中数学

选择性必修第二册 RJB

数智教辅

索取二维码
贴此处
激活享受服务

AI时代就该用AI学习
遇到问题快扫我

江西美术出版社
全国百佳图书出版单位

CONTENTS 目录 导学案

第三章　排列、组合与二项式定理

讲课智能体

3.1　排列与组合

3.1.1　基本计数原理

第 1 课时　基本计数原理

【学习目标】

1. 了解分类加法计数原理、分步乘法计数原理及其意义；
2. 正确理解“完成一件事”的含义，能根据具体问题的特征，选择“分类”或“分步”；
3. 能利用两个原理解决一些简单的实际问题.

课前预习　知识导学　素养初识

◆ **知识点一　分类加法计数原理**

定义：完成一件事，如果有 n 类办法，且：第一类办法中有 m_1 种不同的方法，第二类办法中有 m_2 种不同的方法……第 n 类办法中有 m_n 种不同的方法，那么完成这件事共有 $N=$________种不同的方法.

【诊断分析】 判断正误.(请在括号中打“√”或“×”)

(1)在分类加法计数原理中，两类不同办法中的方法可以相同.　(　　)

(2)在分类加法计数原理中，每类办法中的方法都能独立完成这件事.　(　　)

(3)从甲地到乙地乘坐公交车有 3 个班次，乘坐动车有 2 个班次，则从甲地到乙地共有 6 种方法.　(　　)

◆ **知识点二　分步乘法计数原理**

定义：完成一件事，如果需要分成 n 个步骤，且：做第一步有 m_1 种不同的方法，做第二步有 m_2 种不同的方法……做第 n 步有 m_n 种不同的方法，那么完成这件事共有 $N=$________种不同的方法.

【诊断分析】 1. 判断正误.(请在括号中打“√”或“×”)

(1)在分步乘法计数原理中，任何一个单独的步骤都能完成这件事.　(　　)

(2)在分步乘法计数原理中，每个步骤中完成这个步骤的方法是各不相同的.　(　　)

(3)从甲地到乙地有 3 条路线，从乙地到丙地有 2 条路线，则从甲地经乙地到丙地共有 6 条路线.　(　　)

2. 完成一件事时，如何区分是分类还是分步?

课中探究　考点探究　素养小结

◆ **探究点一　分类加法计数原理**

例 1 (1)有三个袋子，分别装有不同编号的红色小球 3 个，白色小球 4 个，黄色小球 2 个.若从三个袋子中任取 1 个小球，则不同的取法有　(　　)

A. 5 种　　B. 10 种

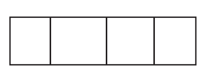
C. 9 种　　D. 24 种

(2)如果 $x,y\in\mathbf{N}$，且 $1\leqslant x\leqslant 3$，$x+y<7$，则满足条件的不同的有序数对 (x,y) 的个数是　(　　)

A. 15　　B. 12　　C. 5　　D. 4

变式 (1)若例 1(1)中从三个袋子中任取 2 个颜色相同的小球，则不同的取法有________种.

(2)要用红色、黄色、蓝色填涂四个格子(如图所示)，要求红色用两次，共有________种不同的填涂方法.



[素养小结]

(1)分类标准是运用分类加法计数原理的难点所在,应抓住题目中的关键词、关键对象、关键位置,恰当地选择一个分类标准.

(2)分类时应注意完成这件事情的任何一种方法必须属于某一类,并且分别属于不同种类的两种方法是不同的方法,不能重复.

(3)分类时除了不能交叉重复外,还不能有遗漏.

◆ **探究点二　分步乘法计数原理的应用**

例2 [2026·郑州高二月考] 有三件不同颜色的上衣以及两条不同颜色的裤子,如果一件上衣和一条裤子配成一套,则不同的搭配种数为　(　　)

A. 5　　B. 6

C. 8　　D. 9

变式 [2026·兰州高二期末] 甲、乙、丙、丁四名同学可以随机地选修音乐、美术、体育中任何一门课程,则不同的选课方案有　(　　)

A. 24种　　B. 36种

C. 64种　　D. 81种

[素养小结]

(1)利用分步乘法计数原理解决问题要按事件发生的过程合理分步,即分步是有先后顺序的,并且分步必须满足:完成一件事的各个步骤是相互依存的,只有各个步骤都完成了,这件事才算完成.

(2)分步必须满足两个条件:一是步骤互相独立,互不干扰;二是步与步确保连续,逐步完成.

◆ **探究点三　两个计数原理的简单应用**

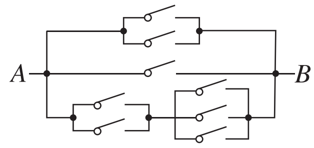
例3 某外语组有9人,每人至少会英语和日语中的一门,其中7人会英语,3人会日语.从中选出会英语和会日语的各1人,有________种不同的选法.

变式 (1)将2个相同的红球和2个相同的黑球放入2个不同的盒子中,每个盒子中至少放1个球,则不同的放法有　(　　)

A. 5种　　B. 6种

C. 7种　　D. 8种

(2)如图,一条电路从A处到B处接通时,可以有________条不同的线路(每条线路仅含一条通路).



[素养小结]

(1)运用两个计数原理的关键在于正确区分"分类"与"分步"."分类"需确定好分类标准,做到"不重不漏";"分步"需明确完成事件的步骤.

(2)对于一些比较复杂的既要运用分类加法计数原理又要运用分步乘法计数原理的问题,我们可以恰当地画出示意图或列出表格,使问题更加直观、清晰.

课堂评价

知识评价　素养形成

1. 某班同学报名参加学校的艺术节,报名舞蹈表演的同学有3人,报名小品表演的同学有4人,有2名同学两项表演都进行了报名,若要从报名的同学中选出1人,则不同的选法种数为　(　　)

A. 5　　B. 6

C. 7　　D. 8

2. 从A地到B地可乘汽车、火车、轮船三种交通工具,如果一天内汽车发3次,火车发4次,轮船发2次,那么一天内乘坐这三种交通工具不同的走法种数为　(　　)

A. 3　　B. 9

C. 24　　D. 25

3. 已知集合$M=\{1,-2,3\}$,$N=\{-3,5,6,-4\}$,从两个集合中各取一个元素作为点的坐标,则这样的坐标在平面直角坐标系中表示第二象限内不同的点的个数为　(　　)

A. 2　　B. 4

C. 5　　D. 6

4. 设椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的焦点在$y$轴上,其中$a\in\{1,2,3,4,5\}$,$b=\{1,2,3,4,5,6,7\}$,则满足上述条件的椭圆个数为________.

5. 将三个分别标有A,B,C的球随机放入编号为1,2,3,4的四个盒子中.若1号盒中无球,则不同的放法种数为________;若1号盒中有球,则不同的放法种数为________.

第 2 课时　基本计数原理的应用

【学习目标】

1. 进一步理解和掌握分类加法计数原理与分步乘法计数原理；
2. 能根据具体问题的特征，选择两种计数原理解决一些实际问题.

课前预习

知识导学　素养初识

◆ 知识点　两个计数原理的联系与区别

	分类加法计数原理	分步乘法计数原理
相同点	用来计算完成一件事的方法种数	
不同点	分类完成，类类相加	分步完成，步步相乘
	每类办法中的每一种方法都能独立完成这件事	每步依次完成才算完成这件事
注意点	类类独立，不重不漏	步步相依，步骤完整

课中探究

考点探究　素养小结

◆ 探究点一　组数问题

例 1　用 0，1，2，3，4，5 这六个数字，

(1)可以组成多少个数字不重复的三位数？

(2)可以组成多少个数字允许重复的三位数？

(3)可以组成多少个数字不重复的三位奇数？

(4)可以组成多少个数字不重复且小于 1000 的自然数？

(5)可以组成多少个大于 3000，小于 5421 且数字不重复的四位数？

变式　(多选题)[2026 · 辽宁丹东高二期末] 下列说法正确的是　(　　)

A. 由数字 1，2，3，4 能够组成 24 个没有重复数字的三位数

B. 由数字 1，2，3，4 能够组成 16 个没有重复数字的三位偶数

C. 由数字 1，2，3，4 能够组成 64 个三位密码

D. 由数字 1，2，3，4 能够组成 28 个比 320 大的三位数

[素养小结]

(1)关于组数问题，一般要遵循特殊优先的原则，即特殊位置优先或特殊元素优先.特殊位置如首位或末尾，特殊元素如 0、奇数、偶数等，两种特殊择其一即可.

(2)解决组数问题，应特别注意其限制条件，有些条件是隐藏的，要善于挖掘.

◆ 探究点二　抽取与分配问题

例 2　(1)某公司新聘用 8 名员工，平均分给甲、乙两个部门，其中 2 名英语翻译人员不能分给同一个部门，3 名电脑编程人员也不能分给同一个部门，则不同的分配方法共有　(　　)

A. 18 种　　B. 24 种　　C. 36 种　　D. 72 种

(2)[2025 · 福建泉州高二期中] 设有编号为 1，2，3，4，5 的五个球和编号为 1，2，3，4，5 的五个盒子，现将这五个球放入这五个盒子内，要求每个盒子内放一个球，并且恰好有一个球的编号与盒子的编号相同，则这样的投放方法的种数为________.

变式　[2025 · 湖北武汉高二期末] 有四对双胞胎共 8 人，从中随机选出 4 人，则其中恰有一对双胞胎的选法种数为　(　　)

A. 40　　B. 48　　C. 52　　D. 60

[素养小结]

求解抽取(分配)问题的方法：

(1)当涉及对象数目不大时，一般选用列举法、树状图法、框图法或者图表法.

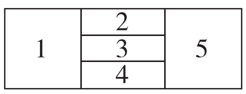
(2)当涉及对象数目很大时，一般有两种方法：①直接法，直接使用分类加法计数原理或分步乘法计数原理；②间接法，去掉限制条件，计算所有的抽取方法数，然后减去所有不符合条件的抽取方法数即可.

◆ 探究点三　涂色问题

[探索] (1)涂色问题的基本要求是什么?

(2)怎样解决涂色问题?

例 3 [2026·辽宁锦州高二期末] 在如图所示的五块土地上种植四种庄稼,有五种庄稼秧苗可供选择,要求相邻的土地不种同一种庄稼,则不同的种植方法共有 (　　)



A. 240 种　　B. 300 种

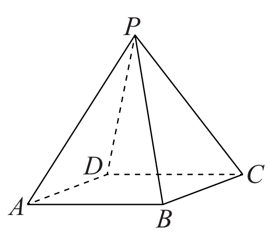
C. 360 种　　D. 420 种

变式 (1)用红、黄、蓝三种颜色去涂图中标号为 1,2,…,9 的 9 个小正方形,使得任意相邻(有公共边)的小正方形所涂颜色都不相同,且标号为 1,5,9 的小正方形涂相同的颜色,则不同的涂法种数为 (　　)

1	2	3
4	5	6
7	8	9

A. 18　　B. 36　　C. 54　　D. 108

(2)如图,在四棱锥 $P\text{-}ABCD$ 中,给 5 个顶点安装彩色灯泡,要求相邻顶点的灯泡不能使用同一颜色,有 4 种不同颜色的灯泡可供选择,则不同的安装方法共有________种.



[素养小结]

涂色与种植问题是考查计数方法的一种常见问题,由于这类问题常常涉及分类与分步,所以在高考题中经常出现,处理这类问题的关键是要找准分类标准,求解涂色与种植问题一般是直接利用两个计数原理求解,常用的方法有:

(1)按区域的不同以区域为主分步计数,并用分步乘法计数原理计算.

(2)以颜色(种植作物)为主的分类讨论法,适用于"区域、点、线段"问题,用分类加法计数原理计算.

(3)将空间问题平面化,转化为平面区域的涂色问题.

(4)对于不相邻的区域,常分为同色和不同色两类,这是常用的分类标准.

(5)对于相邻不同色的记忆口诀"相邻则递减,不相邻则分类".

课堂评价

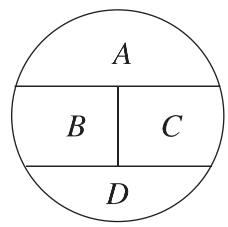
知识评价　素养形成

1. 用 0～9 这 10 个数字,可以组成没有重复数字的三位数的个数为 (　　)

A. 480　　B. 504

C. 648　　D. 720

2. 如图,用 4 种不同的颜色对 A,B,C,D 四个区域涂色,要求相邻的两个区域不能用同一种颜色,则不同的涂色方法有 (　　)



A. 8 种　　B. 16 种

C. 24 种　　D. 48 种

3. 设集合 $I=\{1,2,3,4,5\}$,选择集合 I 的两个非空子集 A 和 B,要使 B 中最小的数大于 A 中最大的数,则不同的选择方法共有 (　　)

A. 50 种　　B. 49 种

C. 48 种　　D. 47 种

4. (多选题)[2026·长春高二期末] 高二年级安排甲、乙、丙三名学生到 A,B,C,D,E 五个社区进行暑期社会实践活动,每名学生只能选择一个社区,且多个学生可以选择同一个社区,则下列说法正确的有 (　　)

A. 所有可能的安排方法共有 3^5 种

B. 如果社区 A 必须有学生选择,则不同的安排方法有 61 种

C. 如果学生甲必须选择社区 A,则不同的安排方法有 25 种

D. 如果甲、乙两名学生必须在同一个社区,则不同的安排方法有 20 种

5. 假如某人有壹元、伍元、拾元、贰拾元、伍拾元、壹佰元的纸币各两张,要支付贰佰壹拾贰元的货款,则有________种不同的支付方式.

3.1.2 排列与排列数

第1课时 排列与排列数

【学习目标】

1. 通过实例,理解排列的概念;
2. 能利用计数原理推导排列数公式;
3. 能用排列数公式进行简单的计算和证明.

课前预习 知识导学 素养初识

◆ 知识点一 排列及其特征

排列:一般地,从 n 个不同对象中,任取 $m(m\leqslant n)$ 个对象,按照__________排成一列,称为从 n 个不同对象中取出 m 个对象的一个排列.特别地,________时的排列(即取出所有对象的排列)称为全排列.

注意点:进行排列的对象间具有互异性、有序性.

【诊断分析】判断正误.(请在括号中打"√"或"×")

(1)a,b,c 与 b,a,c 是同一个排列. ( )

(2)从4个不同对象中任意取出3个对象,只要所取得的对象相同,得到的就是相同的排列. ( )

(3)在一个排列中,若交换两个对象的位置,则该排列不发生变化. ( )

◆ 知识点二 排列数与排列数公式

<table>
<tr><td colspan="2">排列数的定义</td><td>从 n 个不同对象中取出 m 个对象的所有排列的个数,称为从 n 个不同对象中取出 m 个对象的排列数,用符号________表示</td></tr>
<tr><td colspan="2">排列数的表示</td><td>$A_n^m(n\in\mathbf{N}^*,m\in\mathbf{N},m\leqslant n)$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">排列数公式</td><td>乘积式</td><td>$A_n^m=$______________</td></tr>
<tr><td>阶乘式</td><td>$A_n^m=\dfrac{n!}{(n-m)!}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">阶乘</td><td>$A_n^n=$____________$=$________</td></tr>
<tr><td colspan="2">规定</td><td>$0!=$________,$A_n^0=$________</td></tr>
<tr><td colspan="2">性质</td><td>$A_n^m+mA_n^{m-1}=$________</td></tr>
</table>

【诊断分析】1. "排列"和"排列数"有什么联系?

2. 排列数的两个公式"$A_n^m=n(n-1)\cdots(n-m+1)$"与"$A_n^m=\dfrac{n!}{(n-m)!}$",什么时候用"连乘积形式",什么时候用"阶乘形式"?

课中探究 考点探究 素养小结

◆ 探究点一 排列的概念

例1 从集合$\{3,5,7,9,11\}$中任取两个元素,

①相加可得多少个不同的和?

②相除可得多少个不同的商?

③作为椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$中的 a,b,可以得到多少个焦点在 x 轴上的椭圆方程?

④作为双曲线$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$中的 a,b,可以得到多少个焦点在 x 轴上的双曲线方程?

上面四个问题属于排列问题的是 ( )

A. ①②③④ B. ②④

C. ②③ D. ①④

变式 判断下列问题是不是排列问题,并说明理由.

(1)从甲、乙、丙、丁四名学生中选出两名参加活动,其中一名学生参加活动 A,另一名学生参加活动 B;

(2)从甲、乙、丙、丁四名学生中选出两名参加一项活动;

(3)从所有互质的三位数中选出两个数求其和;

(4)从所有互质的三位数中选出两个数求其商;

(5)高二(1)班有四个空位,安排从外校转来的三名学生坐这四个空位中的三个.

[素养小结]

判定一个具体问题为排列问题,一般从两个方面着手:

(1)研究的对象一定是不同元素,若完全相同则一定不是排列问题;

(2)一定要有序,即顺序不同排列的结果不同,排列的过程有两个,首先是"取",然后是"排",不要将"取"的过程误认为是排列.

◆ 探究点二 解决简单的排列问题

例2 (1)从甲、乙、丙三人中选两人站成一排的所有站法为 ( )

A. 甲乙,乙甲,甲丙,丙甲

B. 甲乙,丙乙,丙甲

C. 甲乙,甲丙,乙甲,乙丙,丙甲,丙乙

D. 甲乙,甲丙,乙丙

(2)从 a,b,c,d,e 五个元素中每次取出三个元素,可组成________个以 b 为首的不同排列,它们分别为________________________.

例3 (1)[2025·福州高二期末] 福厦高铁全线共设8座车站:福州南、福清西、莆田、泉港、泉州东、泉州南、厦门北、漳州,则铁路部门应为福厦高铁线上的这8个站间准备不同的火车票的种数为 ( )

A. 28 B. 56 C. 64 D. 112

(2)6名同学站成一列,共有________种列队方式.(用数字作答)

变式 (1)从1,2,3,4四个数字中任选两个数进行加、减、乘、除运算,分别计算它们的结果,则可以看作排列问题的运算有 ( )

A. 1种 B. 2种 C. 3种 D. 4种

(2)[2026·长沙高二期末] 在体操的某次队形变化时,A,B,C,D,E,F 六位同学要排成一个"三角形"队形,其中第一排站一位同学,第二排站两位同学,第三排站三位同学,则这六位同学的站法有 ( )

A. 1080种 B. 720种 C. 360种 D. 60种

[素养小结]

在排列个数不多的情况下,树形图是一种比较有效的表示方式.在操作中先将元素按一定顺序排出,然后以先安排哪个元素作为分类标准进行分类,在每一类中余下的元素在前面元素不变的情况下确定第二个元素,再按此元素分类,依次进行,直到完成一个排列,这样能不重不漏,最后按树形图写出所有排列.

在排列个数较多的情况下,则采用排列数进行计算.

◆ 探究点三 排列数公式及性质的应用

例4 (1)[2026·南京高二期中] $18\times19\times20\times21\times\cdots\times30$ 可以表示为 ( )

A. A_{30}^{12} B. A_{30}^{13} C. A_{30}^{14} D. A_{30}^{15}

(2)已知 $3A_8^x=4A_9^{x-1}$,则 $x=$________.

例5 计算:$A_7^4+4A_7^3+4A_8^3+4A_9^3+\cdots+4A_{2025}^3=$________.

变式 (1)(多选题)下列等式中正确的是 ( )

A. $A_n^3=(n-2)A_n^2$ B. $\dfrac{1}{n}A_{n+1}^n=A_{n+1}^{n-1}$

C. $nA_{n-1}^{n-2}=A_n^n$ D. $\dfrac{n}{n-m}A_{n-1}^m=A_n^m$

(2)不等式 $A_9^x>6A_9^{x-2}$ 的解集为__________.

(3)$A_8^6-6A_7^5-6A_6^5=$________.(用数字作答)

[素养小结]

(1)排列数公式的乘积的形式适用于个体计算和当 m 较小时的含排列数的方程和不等式问题.

(2)排列数公式的阶乘形式主要用于与排列数有关的证明、解方程和不等式等问题,具体应用时注意阶乘的性质,提取公因式,可以简化计算.

(3)排列数中若有参数,要注意参数的取值范围.

拓展 从排列的角度理解排列数公式：

(1)$A_n^m=nA_{n-1}^{m-1}$；(2)$A_n^m+mA_n^{m-1}=A_{n+1}^m$.

课堂评价

知识评价　素养形成

1. $A_9^3=$ (　　)

A. 9×3　　B. 9^3

C. $9\times8\times7$　　D. $9\times8\times3$

2. [2026·四川达州高二期末] 从6名学生中选出2名分别担任组长和副组长,则不同的选择方法种数可表示为 (　　)

A. 2×6　　B. 2^6　　C. A_6^2　　D. 6^2

3. [2026·辽宁营口高中高二月考] $(x-2)(x-3)(x-4)\cdots(x-15)(x\in\mathbf{N}^*,x>15)$可表示为 (　　)

A. A_{x-2}^{13}　　B. A_{x-2}^{14}　　C. A_{x-15}^{13}　　D. A_{x-15}^{14}

4. 北京、广州、南京、天津4个城市相互通航,有________种机票.(用数字作答)

5. 计算:$A_9^9-71A_7^7-7A_6^6=$________.

第2课时　排列数的应用

【学习目标】

1. 进一步理解排列的概念,掌握一些排列问题的常用解题方法;
2. 能应用排列知识解决简单的实际问题.

课前预习

知识导学　素养初识

◆ 知识点　排列数的应用问题

1. 解简单的排列数的应用问题首先必须认真分析题意,看能否把问题归结为排列问题,即是否满足排列定义中的三个条件(备取对象互不相同;取出对象没有重复;按一定顺序排成一列),特别是有顺序.

2. 解排列应用题时,要学会常见条件的应用,根据条件从对象和位置两个方面入手,正确运用分类加法计数原理和分步乘法计数原理.分类时,要注意各类之间不重复、不遗漏.分步时,要注意依次做完各个步骤后,事情才能完成.当不符合条件的情况较少时,也可以采用间接法.

3. 记住一些常见条件的处理方式,对提高解题能力有很大的帮助.

课中探究

考点探究　素养小结

◆ 探究点一　无限制条件的排列问题

例1 (1)某高校开设了篮球、足球、太极拳等12门体育选修课,每名学生需在大一的两个学期分别选择一门选修课学习,且两个学期所选课程不能重复,则该校一名大一学生的选课方法有 (　　)

A. 66种　　B. 96种　　C. 132种　　D. 144种

(2)[2026·江苏扬州高二期末] 8名学生排成两排,每排4人,则不同的排法种数为 (　　)

A. $A_4^4+A_4^4$　　B. $A_4^4A_3^3$

C. $A_4^4A_4^4$　　D. A_8^8

变式 (1)[2025·武汉高二期中] 为贯彻文明校园,某中学有5名学生志愿者参加文明监督岗工作,若每周一、三、五值班,每班1人,每人每周最多值1天班,则不同的排班种数为 (　　)

A. 12　　B. 45　　C. 60　　D. 90

(2)某 4 位同学排成一排准备照相时，又来了 2 位同学要加入，如果保持原来的 4 位同学的相对顺序不变，则不同的加入方法种数为________.

[素养小结]

没有限制条件的排列问题关键在于顺序而不是位置，比如站排问题，无论多少排，都满足全排列. 分类加法计数原理和分步乘法计数原理贯穿于所有的排列问题中，具体问题中要能够准确应用.

◆ 探究点二　排队问题

例 2　有 7 名学生，求在下列不同条件下的排法种数.

(1)全体站成一排，甲不站在最左边；

(2)全体站成一排，甲、乙均不在两边；

(3)全体站成一排，其中甲不站在最左边，也不站在最右边；

(4)全体站成一排，其中甲不站在最左边，乙不站在最右边；

(5)站成三排，前排 2 名学生，中间排 3 名学生，后排 2 名学生，其中甲站在中间排的中间位置.

例 3　有 7 名学生，其中 3 名男生、4 名女生，求在下列不同条件下的排法种数.

(1)全体站成一排，女生互不相邻；

(2)男生甲、乙、丙三人从左往右依次站好，女生顺序不定；

(3)7 名学生坐圆桌吃饭，其中甲、乙相邻.

变式　(1)[2025·河北张家口高二期末] 某同学将英文单词“better”中字母的顺序记错了，则该同学写错的情况有　　(　　)

A. 360 种　　B. 359 种

C. 180 种　　D. 179 种

(2)在一项太空实验中，先后要实施 6 个程序.

①若程序 A 只能出现在第一步或最后一步，程序 B 和 C 实施时必须相邻，则不同的实验顺序的安排方法共有________种；

②若程序 B 和 C 都与程序 D 不相邻，则不同的实验顺序的安排方法共有________种.

[素养小结]

(1)对于特殊限制条件的排列问题,要记住其特殊的解决方法,如捆绑法、插空法、除序法等.

(2)限制条件分析时有位置分析法、对象分析法,先特殊(对象或位置)后一般,有多个条件时,先肯定(在某位置)后否定(不在某位置),两条件有影响时,可根据影响先分类再分步进行求解,对于分类过多的问题可以采用间接法.

(3)若一个排列中的某几个不同元素的先后顺序不能调换,或者为相同元素,也就是说这几个元素的先后顺序只能有一种排列方式,则采用倍缩法.

◆ 探究点三　排数问题

例4 用0,1,2,3,4,5这六个数字可以组成多少个无重复数字的:

(1)六位奇数?

(2)个位数字不是5的六位数?

(3)比400 000大的六位数?

变式 (1)定义:各位数字之和为5的四位数叫"吉祥数",例如"1022,3110",则所有"吉祥数"的个数是 (　　)

A. 35　　B. 32

C. 29　　D. 20

(2)用0,0,1,2,2,3这六个数字可以组成________个六位数.

[素养小结]

解数字排列问题常见的解题方法:

(1)"两优先排法":特殊元素优先排列;特殊位置优先填充.如"0"不排"首位".

(2)"分类讨论法":按照某一标准将排列分成几类,然后按照分类加法计数原理进行求解.要注意以下两点:一是分类标准必须恰当;二是分类过程要做到不重不漏.

(3)"排除法":全排列数减去不符合条件的排列数.

(4)"位置分析法":按位置逐步讨论,把要求数字的每个数位排好.

课堂评价

知识评价　素养形成

1. A,B,C,D,E五人站成一排,如果A,B必须相邻,那么排法种数为 (　　)

A. 24　　B. 120

C. 48　　D. 60

2. [2026·重庆一中高二月考] 现有4男3女共7个人排成一排照相,其中三个女生不全相邻的排法种数为 (　　)

A. $A_5^3A_5^5$　　B. $A_7^7-A_5^5A_3^3$

C. $A_4^4A_5^3$　　D. $A_7^7-A_5^3$

3. 某场比赛的三个地点需要志愿者服务,现有甲、乙、丙、丁四人报名参加,每个地点仅需一名志愿者,每人至多在一个地点服务,若甲不能到第一个地点服务,则不同的安排方法共有 (　　)

A. 18种　　B. 24种

C. 32种　　D. 64种

4. [2026·南京高二期中] 自然对数e也称为欧拉数,它是数学上最重要的常数之一,e的近似值约为2.718 281 8….若用欧拉数中的6个数字1,8,2,8,1,8设置一个6位数的密码,则不同的密码有 (　　)

A. 720个　　B. 180个

C. 60个　　D. 260个

5. 身高互不相同的7名运动员站成一排,其中甲、乙、丙3人自左向右从高到矮排列的不同排法共有________种.(用数字作答)

3.1.3 组合与组合数

第1课时 组合与组合数

【学习目标】

1. 通过实例,理解组合的概念;
2. 能利用计数原理推导组合数公式;
3. 能利用组合数公式进行简单计算和证明;
4. 会用组合数公式解决一些简单的组合问题.

课前预习

知识导学 素养初识

◆ 知识点一 组合的概念

定义:一般地,从 n 个不同对象中取出 $m(m\leqslant n)$ 个对象__________,称为从 n 个不同对象中取出 m 个对象的一个组合.

【诊断分析】 判断正误.(请在括号中打"√"或"×")

(1)"abc"与"bca"是相同的排列. ( )

(2)"abc"与"bca"是相同的组合. ( )

◆ 知识点二 组合数与组合数公式

(1)从 n 个不同对象中取出 m 个对象的所有组合的个数,称为从 n 个不同对象中取出 m 个对象的组合数,用符号________表示.

(2) $C_n^m=\dfrac{A_n^m}{A_m^m}=\dfrac{n(n-1)\cdots[n-(m-1)]}{m\times(m-1)\times\cdots\times2\times1}=\dfrac{n!}{(n-m)!\,m!}$.

(3)规定:$C_n^0=$________.

注意:

(1)在符号 C_n^m 中,$m\leqslant n$,且 $m\in\mathbf{N},n\in\mathbf{N}^*$;

(2)组合数公式的展开式分子是从 n 开始 m 个正整数相乘,分母是 m 的阶乘.

【诊断分析】 1. 判断正误.(请在括号中打"√"或"×")

(1)两个组合相同的充要条件是组成组合的对象完全相同. ( )

(2)从 a_1,a_2,a_3 三个不同对象中任取两个对象组成一个组合,所有组合的个数为 C_3^2. ( )

(3)从1,3,5,7中任取两个数相乘可得 C_4^2 个积. ( )

(4)从1,3,5,7中任取两个数相除可得 C_4^2 个商. ( )

2. 组合数公式的推导方法对我们解题有何启发?

◆ 知识点三 组合数的性质

1. $C_n^m=$________.

2. $C_n^{m+1}+C_n^m=$________.

【诊断分析】 判断正误.(请在括号中打"√"或"×")

(1)若 $C_8^m=C_8^{2m-1}$,则 $m=1$. ( )

(2)$C_{n+1}^k=C_n^{k-1}+C_{n-1}^k+C_{n-1}^{k-1}$. ( )

课中探究

考点探究 素养小结

◆ 探究点一 组合的概念

例1 下列问题,哪些是组合问题?哪些是排列问题?

(1)a,b,c,d 四支足球队之间进行单循环赛(任意两支足球队之间均比赛一次),共需比赛多少场?

(2)a,b,c,d 四支足球队争夺冠、亚军,有多少种不同的结果?

(3)从全班40人中选出3人分别担任班长、副班长、学习委员三个职务,有多少种不同的选法?

(4)从全班40人中选出3人参加某项活动,有多少种不同的选法?

(5)平面内有 A,B,C,D,E 共5个不同的点,以其中2个点为端点的线段共有多少条?

变式 判断下列问题是排列问题,还是组合问题.

(1)10 个人相互各写一封信,共写了多少封信?

(2)从 1,2,3,…,9 九个数字中任取 3 个,组成一个三位数,这样的三位数共有多少个?

(3)从 1,2,3,…,9 九个数字中任取 3 个,然后把这三个数字相加得到一个和,这样的和共有多少个?

[素养小结]

组合概念的两个要点:

①取出的对象是不同的;

②"只取不排",即取出的 m 个对象与顺序无关,无序性是组合的特征性质.

◆ 探究点二 解决简单的组合题

例 2 (1)集合{0,1,2,3,4}的含三个元素的子集的个数为________.

(2)平面内凸 n 边形的对角线的条数为________.

变式 12 件产品中有 3 件次品,9 件正品,从中抽取 5 件.

(1)5 件中没有次品的取法有多少种?

(2)5 件中有 2 件次品的取法有多少种?

◆ 探究点三 组合数公式的应用

例 3 (1)[2026·辽宁盘锦辽东湾高中高二月考]计算:$C_n^{5-n}+C_{n+1}^{9-n}$.

(2)[2026·济南高二期末]证明:$kC_n^k=nC_{n-1}^{k-1}$,其中 $1\leqslant k\leqslant n$,$n\geqslant 2$.

变式 (1)[2026·沈阳高二期末]解方程:$3C_{x-3}^{x-7}=5A_{x-4}^2$.

(2)已知 $m,n,k\in\mathbf{N}^*$,$m\geqslant k\geqslant n$,证明:$C_m^kC_{m-k}^n=C_m^nC_{m-n}^k$.

[素养小结]

关于组合数公式的选择:

(1)涉及具体数字和计算问题的可以直接用公式 $C_n^m=\frac{A_n^m}{A_m^m}=\frac{n(n-1)\cdots[n-(m-1)]}{m\times(m-1)\times\cdots\times 2\times 1}$计算.

(2)涉及字母或证明、化简问题可以用阶乘式 $C_n^m=\frac{n!}{(n-m)!\ m!}$计算.

◆ 探究点四 组合数性质的应用

例 4 求满足等式 $C_{n+3}^{n+1}=C_{n+1}^{n-1}+C_n^{n-2}+C_{n+1}^n$ 的正整数 n.

变式 解关于正整数 x 的不等式(方程)：

(1)$2C_{x+1}^{x-2}<3C_{x+1}^{x-1}$；

(2)$C_{x+2}^{x-2}+C_{x+2}^{x-3}=\frac{1}{4}A_{x+3}^{3}$.

[素养小结]

(1)性质 $C_n^m=C_n^{n-m}$ 体现了对称性，具体应用中容易被忽略.

(2)性质 $C_n^{m+1}+C_n^m=C_{n+1}^{m+1}$ 常常用于化简、求值，具体应用时要能够构造等式成立的条件.

拓展 从组合的角度理解：

(1)$C_n^m=C_n^{n-m}$；

(2)$C_n^{m+1}+C_n^m=C_{n+1}^{m+1}$.

课堂评价 知识评价 素养形成

1. 下列四个问题中属于组合问题的是 ( )

A. 从 4 名志愿者中选出 2 名分别参加导游和翻译的工作

B. 从 0,1,2,3,4 这 5 个数字中选取 3 个不同的数字组成一个三位数

C. 从某班 40 名学生中选 5 名组成学习小组

D. 老师在排座位时，将甲、乙两人安排为同桌

2. $\frac{7!}{C_7^6\times 4!}=$ ( )

A. 15　　B. 30　　C. 35　　D. 42

3. [2025·黑龙江大兴安岭实验中学高二月考] 若 $A_n^3=12C_n^2$，则 $n=$________.

4. 将 10 人分成甲、乙两组，其中甲组 4 人，乙组 6 人，则不同的分组方法的种数为________.(用数字作答)

第 2 课时　组合数的综合应用

【学习目标】

1. 掌握具有限制条件的组合和排列综合问题的解决方法；
2. 理解相同元素和不同元素的分组分配问题.

课前预习 知识导学 素养初识

◆ 知识点　组合数的应用问题

1. “分组”与“分配”问题的解法：

(1)分组问题属于“组合”问题，常见的分组问题有三种：

①完全均匀分组，每组的对象个数均相等，共分为 m 组，最后必须除以 $m!$；

②部分均匀分组，应注意不要重复，若有 n 组对象是均匀分组，最后必须除以 $n!$；

③完全非均匀分组.

(2)分配问题属于“排列”问题，分配问题可以按要求逐个分配，也可以分组后再分配.

2. 排列与组合的综合应用问题的解法：

(1)审清题意，区分哪是排列，哪是组合；

(2)往往综合问题会有多个限制条件，应认真分析确定分类还是分步；

(3)先取后排是解决综合问题的基本顺序.

课中探究

考点探究 素养小结

◆ 探究点一 有条件限制的组合问题

例1 某组织有男运动员6名,女运动员4名,其中男、女队长各1名.现选派5人外出参加比赛,在下列情形中各有多少种选派方法.

(1)男运动员3名,女运动员2名;

(2)既要有队长,又要有女运动员;

(3)至少选取1名队长.

变式 已知某射箭场馆共需要6名志愿者,其中3名会说韩语,3名会说日语.目前可供选择的志愿者中有4人只会韩语,5人只会日语,另外还有1人既会韩语又会日语,则不同的选人方案共有________种.(用数字作答)

[素养小结]

有限制条件的选取问题主要有两类:

(1)"含"与"不含"问题,常按分步乘法计数原理,先将"含"的取出,"不含"的可把所指元素去掉再取,分步计数.

(2)"至少""至多"问题一是找准对立面,使用间接法;二是直接分类法,分类过程要做到不重不漏.

◆ 探究点二 不同元素的分组、分配问题

例2 按下列要求分配6本不同的书,各有多少种不同的分配方法?

(1)分成3份,1份1本,1份2本,1份3本;

(2)甲、乙、丙3人中,1人得1本,1人得2本,1人得3本;

(3)平均分成3份,每份2本;

(4)平均分配给甲、乙、丙3人,每人2本;

(5)分成3份,1份4本,另外2份每份1本;

(6)甲、乙、丙3人中,1人得4本,另外2人每人得1本;

(7)甲得1本,乙得1本,丙得4本;

(8)甲、乙、丙3人中,每人至少得1本.

[素养小结]

1. 分配问题有两类,一是将物直接分配给人,即直接分配问题;二是先分组再将组分配给人,即间接分配.

(1)直接分配问题主要是明确分配的数量,即具体到具体人的数量,例如甲得2本书,乙得3本书,此类问题主要是应用组合知识进行直接求解.

(2)间接分配问题一般是未明确分配的数量,即不知道具体分配的数量,例如甲、乙、丙其中1人得一本书,1人得2本书,1人得3本书,此类问题一般是先分组再将组全排列分配给人.

2. 分组问题分为平均分、部分平均分、均未平均分三类题型.平均分就是明确数量问题,直接应用组合即可解决;部分平均分若有m个组平均分,则需除以$m!$;若均未平均分,则不需要除以任何数值,即为组合数即可.

◆ **探究点三　相同元素的分配（组）问题**

例 3　将 20 个完全相同的球放入编号为 1,2,3,4,5 的五个盒子中.

(1)若每个盒子至少有一个球,则一共有多少种放法?

(2)若每个盒子可放任意个球,则一共有多少种放法?

(3)若要求每个盒子放的球的个数不小于其编号数,则一共有多少种放法?

变式　[2026·深圳高二期末] 若例 3 中,恰有一个盒子不放球,则共有________种放法.

[素养小结]

隔板法:如果将放有小球的盒子紧挨着成一行放置,便可看作排成一行的小球的空隙中插入了若干隔板,相邻两块隔板形成一个"盒".每一种插入隔板的方法对应着小球放入盒子的一种方法,此法称为隔板法.

(1)应用隔板法常用的条件是:一是解决相同元素的分配问题;二是可以转化为"至少有一个"的问题.

(2)基本题型:将 n 个相同的元素分给 m 个不同的对象($n\geqslant m$).

①每个对象至少有一个元素,则有 C_{n-1}^{m-1} 种方法.可描述为 $n-1$ 个空中插入 $m-1$ 个隔板;

②每个对象可以有 0 个元素,则将 m 个不同对象作为 m 个相同元素,此时共有 $m+n$ 个相同元素,则有 C_{n+m-1}^{m-1} 种方法;

③每个对象可以有多个元素,则可先为 m 个不同的对象分配一些元素,保证满足条件"至少有一个"后,再应用基本方法进行求解.

◆ **探究点四　排列、组合的综合应用**

例 4　某校拟举办"祖国,你好"的诗歌朗诵比赛.该校高三年级准备从包括甲、乙、丙在内的 7 名学生中选派 4 名学生参加,要求甲、乙、丙这 3 名学生中至少有 1 人参加,且当这 3 名学生都参加时,甲和乙的朗诵顺序不能相邻,那么选派的 4 名学生不同的朗诵顺序情况的种数为　　(　　)

A. 720　　B. 768

C. 810　　D. 816

变式　[2025·福建泉州高二期末] 某学校举办运动会,径赛类共设 100 米、200 米、400 米、800 米、1500 米 5 个项目,田赛类共设铅球、跳高、跳远、三级跳远 4 个项目.现甲、乙两名学生均选择一个径赛类项目和一个田赛类项目参赛,则甲、乙的参赛项目有且只有一个相同的方法种数为　　(　　)

A. 70　　B. 140

C. 252　　D. 504

[素养小结]

对于排列组合的综合题目,一般是先取出符合要求的对象组合(分组),再对取出的对象排列,"先取"按被取对象的类别进行分解,"后排"按特殊对象(位置)进行分解.

课堂评价　知识评价　素养形成

1. [2025·哈尔滨三中高二期末] 某地突发洪水,当地政府组织抗洪救灾活动,现有 7 辆相同的车派往 3 个不同的地方,每个地方至少派往一辆车,则不同派法的种数为　　(　　)

A. 20　　B. 15

C. 12　　D. 10

2. 某医院从 9 名医疗专家中抽调 6 名到社区医院进行义诊，其中这 9 名医疗专家中有 4 名是外科专家，则抽调的 6 名专家中恰有 2 名是外科专家的抽调方法的种数为 ( )

A. 15　　B. 30

C. 60　　D. 90

3. 6 本相同的书分给 4 名同学，每人至少一本，不同的分法种数为 ( )

A. 4　　B. 6　　C. 10　　D. 15

4. 某中学为迎接即将到来的元宵节筹备了 3 款灯谜，现准备将其印制在 5 个不同的灯笼上，若每个灯谜都必须印制，且每个灯笼仅印制 1 款灯谜，则不同的分配方案共有________种.

3.2 数学探究活动：生日悖论的解释与模拟

课前预习　知识导学　素养初识

◆ 一、生日悖论

在不少于 23 个人的人群中至少有两个人生日相同的概率大于________，在一个 30 人的班级中，至少有两个人生日相同的概率约为________，当人数达到 41 时，这种概率就超过________了！这一结论与人们的直觉相差比较远，因此常被称为____________.

◆ 二、生日问题的求解

$n(n\in\mathbf{N}^*, n\leqslant 365)$个人中至少有两个人生日相同的概率 P 有多大呢？

假设一年中有 365 天，则 $n(n\in\mathbf{N}^*, n\leqslant 365)$个人的生日都不相同的概率为 $\frac{365}{365}\times\frac{364}{365}\times\cdots\times\frac{365-n+1}{365}=\frac{365!}{365^n(365-n)!}$，那么 $n(n\in\mathbf{N}^*, n\leqslant 365)$个人中至少有两个人生日相同的概率 $P=1-\frac{365}{365}\times\frac{364}{365}\times\cdots\times\frac{365-n+1}{365}=1-\frac{365!}{365^n(365-n)!}$.

将 n 与 P 的关系列入下表：

n	23	30	40	50	60	100
P	50.7%	70.6%	89.1%	97.0%	99.4%	$1-3.07\times10^{-7}$

◆ 三、与某个人同一天生日的概率

假设一年中有 365 天，现有 n 个人，那么这 n 个人中至少有 1 个人与你生日相同的概率为 $1-\left(\frac{364}{365}\right)^n$.

当 $n=253$ 时，这 n 个人中至少有 1 个人与你有相同生日的概率约为 50%，当 $n=587$ 时，这 n 个人中至少有 1 个人与你有相同生日的概率约为 80%. 很明显这个问题与“生日悖论”并不是一个问题.

◆ 四、检验“生日悖论”实例

1. 问题的提出

有一天，同学小张、小王和小徐一起去游乐场玩耍，小张看到游乐场里大约有 50 人，就对小王和小徐说：“咱们打个赌，我敢说游乐场里肯定有生日相同的人.”小王和小徐都不接受小张的说法，认为生日相同的可能性太小了. 游乐场里的人都正在玩，要去调查现在的这些人会打扰到大家，小张建议通过调查自己所在班级里同学的生日情况来验证自己的说法.

2. 获取样本数据

小张、小王和小徐分工去调查自己所在班级共 50 名同学的生日，日期用数字表示，如 3 月 5 日记为 0305，通过调查，获取的数据如下：

小张获取的 15 位同学的生日为：1227　0111　1226　1213　1230　0827　0508　1209　0712　1203　0324　0905　1227　1123　1102；

小王获取的 17 位同学的生日为：0122　0622　0227　0807　0412　0108　0825　1107　1031　0219　0117　0503　0606　0113　0920　0415　1105；

小徐获取的 18 位同学的生日为：0102　1203　0826　0928　0122　0316　1121　0727　0121　0111　1229　1114　1118　0325　0607　0916　1112　0128.

3. 验证结果

◆ 五、生日悖论的解释与模拟活动记录表

活动开始时间：____________

<table>
<tr><td colspan="2">(1)成员与分工</td></tr>
<tr><td>姓名</td><td>分工</td></tr>
<tr><td>小张</td><td>负责班级 15 位同学的生日调查</td></tr>
<tr><td>小王</td><td>负责班级 17 位同学的生日调查</td></tr>
<tr><td>小徐</td><td>负责班级 18 位同学的生日调查</td></tr>
<tr><td colspan="2">(2)验证生日悖论的实际数据
①在班级的 50 人中居然有四对同学的生日是同一天，分别是 1227,0111,0122,1203；
②小张的生日是 0508,但是其他 49 人中没有 1 人和小张有相同的生日</td></tr>
<tr><td colspan="2">(3)$n(n\in \mathbf{N}^*,n\leqslant 365)$个人中至少有两个人生日相同的概率 $P=1-\frac{365}{365}\times\frac{364}{365}\times\cdots\times\frac{365-n+1}{365}=1-\frac{365!}{365^n(365-n)!}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">(4)m 个人中至少有一个人的生日是指定日期的概率 $P=1-\left(\frac{364}{365}\right)^m$</td></tr>
<tr><td colspan="2">(5)活动总结
当人群的人数达到 23 时，至少有两个人生日相同的概率就超过了 50%，而当人数达到 50 时，至少有两个人生日相同的概率约为 97.0%.要想在一群人中出现和自己一天生日的人的概率达到 80%，那么人群的人数就要接近 600 了</td></tr>
</table>

活动结束时间：____________

课堂评价

知识评价 素养形成

假定人在一年 365 天中的任一天出生的概率是一样的，某班级有 60 名同学，则至少有 2 名同学的生日相同的概率约为多少？